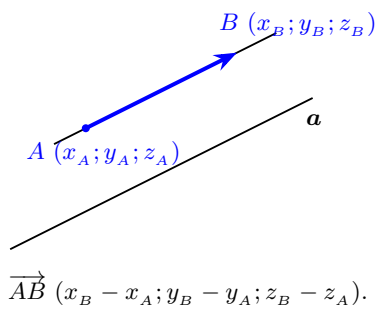


Теория для координатно-векторного метода

Про координаты, длину и середину отрезка

Вектор, координаты вектора



Любой ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или параллельной ей, называется **направляющим вектором** прямой.

Длина вектора

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

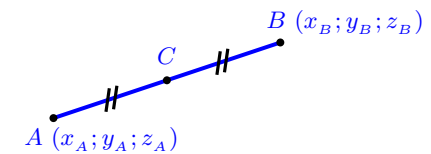
* Если дан вектор с заданными координатами, например, $\vec{a}(x; y; z)$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

** И, по сути, точно также определяется **расстояние между двумя точками**

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Координаты середины отрезка

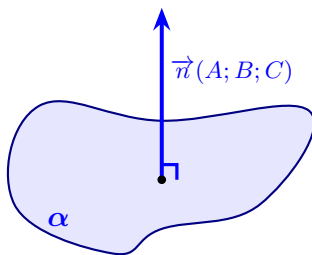


C — середина отрезка AB

$$C \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Про задание плоскости

Пусть дана плоскость α и вектор нормали $\vec{n}$ к ней:



тогда **уравнение плоскости** имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $\vec{n}(A; B; C)$ — координаты вектора нормали.

Уравнение плоскости можно составить, используя три точки из плоскости, не лежащие на одной прямой. Пусть это точки $P(x_1; y_1; z_1)$, $Q(x_2; y_2; z_2)$ и $R(x_3; y_3; z_3)$.

1. Через систему уравнений:

1) Если плоскость проходит через начало системы координат, то $D = 0$; если нет и при этом неважно расстояние от плоскости до начала системы координат, то принимаем $D = 1$ (по сути, в этом случае работаем с новым уравнением плоскости $A'x + B'y + C'z + 1 = 0$)

2) Подставляем координаты точек в уравнение плоскости и решаем систему:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0. \end{cases}$$

3) Решаем систему и получаем значения коэффициентов A , B и C .

2. Через определитель матрицы

Подставляем координаты точек в матрицу плоскости и считаем её определитель:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

(*) Оптимально посчитать так:

$$(x - x_1) \cdot \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} - (y - y_1) \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + (z - z_1) \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

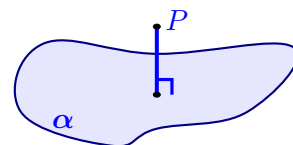
A определитель второго порядка считайте по правилу:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от произвольной точки $P(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α , заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле:

$$\rho(P; \alpha) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Про операции над векторами

Простейшие операции

Пусть даны векторы:

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1) \text{ и } \vec{b}(x_2; y_2; z_2).$$

Также известно, что

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\vec{m} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\vec{n} = k\vec{a}.$$

Тогда:

$$\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$$

$$\vec{m}(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2),$$

$$\vec{n}(kx_1; ky_1; kz_1).$$

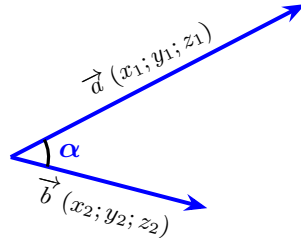
Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение можно найти по одной из формул:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

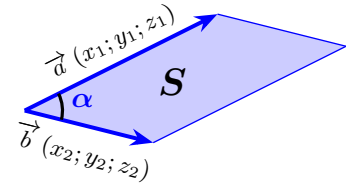
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha,$$

α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Векторное произведение векторов

Главное геометрическое свойство векторного произведения — модуль его результата численно равен площади параллелограмма, построенного на исходных векторах.



$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

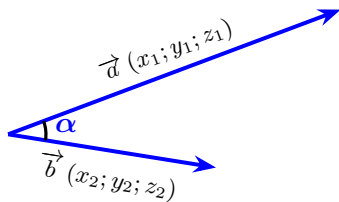
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Про углы

Скалярное произведение векторов открывает возможности находить:

Угол между векторами

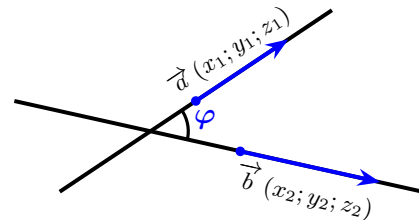
Формулу для косинуса угла легко получить «стыковкой» двух формул



$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Угол между прямыми

получаем через направляющие векторы для прямых



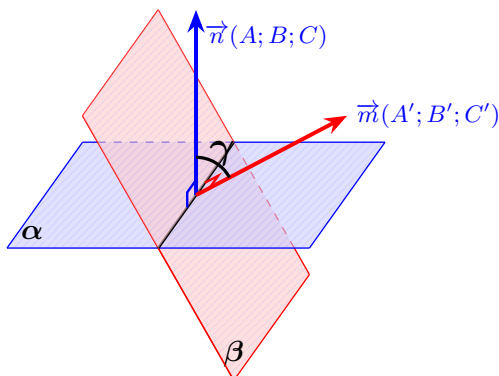
$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Угол между плоскостями

определяется через вектора нормали к плоскостям.

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\beta : A'x + B'y + C'z + D' = 0$$



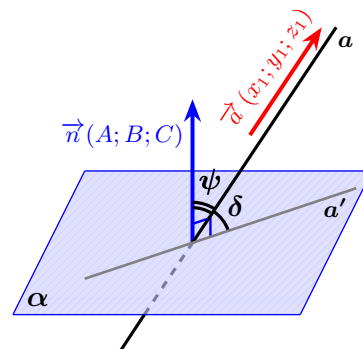
$$\cos \gamma = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Угол между прямой и плоскостью

определяется через направляющий вектор прямой и вектор нормали к плоскости

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

прямая a' — проекция прямой a на плоскость α



$$\sin \delta = |\cos \psi| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|x_1 \cdot A + y_1 \cdot B + z_1 \cdot C|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$