П. САМСОНОВ,
г. Москва



8–9 классы

О МЕТОДЕ ИНТЕРВАЛОВ ЗАМОЛВИТЕ СЛОВО...

В 2026 году в открытый банк заданий для проведения основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике были включены новые задачи к номеру 20 — на применение метода интервалов. От учителей стали поступать вопросы о полноте записи решения таких неравенств у участников экзамена. За разъяснениями редакция журнала обратилась к одному из разработчиков КИМ ОГЭ по математике — *Павлу Ивановичу САМСОНОВУ*.

Появление новых задач в открытом банке заданий ОГЭ по математике, связанных с развернутым решением неравенств, вполне закономерно и ожидаемо. По действующей спецификации контрольно-измерительных материалов (КИМ) к задаче с номером 20 ОГЭ по математике отнесены задания на проверку уровня освоения выпускниками основной школы алгоритмов решения уравнений и их систем, неравенств. Поэтому включение новых заданий на решение неравенств методом интервалов делает экзамен сбалансированным, ведь в заданиях первой части ОГЭ по математике присутствуют задачи на решение линейных неравенств и их систем, квадратичных неравенств.

Новые задачи, включенные в банк заданий, имеют четкую направленность на выявление уровня владения алгоритмом решения неравенств у выпускников основной школы и их готовности к продолжению образования на старшей ступени образования. Кроме того, эти задачи не имеют никаких сложностей с точки зрения выполнения необходимых преобразований для применения метода интервалов: для их решения не требуется применять какие-то нестандартные или комбинированные приемы преобразований алгебраических выражений или владеть специальными познаниями в области применения метода интервалов.

Важно обратить внимание и на то, что термины «новый банк заданий» или «старый банк заданий» бессмысленны. Это не самая лучшая придумка, а если точнее, то «уловка» со стороны тех, кто ведет «свой собственный бизнес» на подготовке выпускников основной школы к ОГЭ вне образовательной организации. Существует только действующий открытый банк заданий, причем по любому предмету, для проведения экзамена в конкретном году. Это незыблемое и нормативно закрепленное условие проведения экзамена ОГЭ!

Рассмотрим неравенство, включенное в 2026 году в открытый банк заданий ОГЭ:

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x-2}.$$

Сложное ли оно для выпускника основной школы? Если он первым же преобразованием приводит его к виду $x - 2 \geq x$, то, конечно же, сложное. Более того, неравенство составлено так, чтобы можно было предупредить ошибки. Ведь следующее преобразование неравенства приведет его к виду $-2 \geq 0$ или $0 \geq 2$, после чего должен будет сделан вывод об отсутствии решений у исходного неравенства.

Если выпускник основной школы преобразует неравенство $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x-2}$ к виду $\frac{x-2-x}{x(x-2)} \geq 0$, то можно смело предположить, что, уже обучаясь в 10–11-м классе и решая неравенства вида

$$\frac{1}{2^x} \geq \frac{1}{2^x - 2},$$

$$\frac{1}{\log_2 x} \geq \frac{1}{\log_2 x - 2}$$

или

$$\frac{1}{\log_2 x} \geq \frac{1}{\log_2 \frac{x}{4}},$$

ошибок, связанных с преобразованием неравенства $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{t-2}$, он уже не совершит, и на уроках математики его внимание будет сосредоточено точно не на преобразовании дробно-рационального неравенства.

Перед участником экзамена не ставится задача воспроизвести на экзамене текст учебника в части, связанной с решением конкретного типа задачи. Текст учебника имеет обучающую функцию в объяснении метода (подхода) решения задачи в изучаемой теме. Запись же развернутого решения задачи участником экзамена имеет другую функцию, не тождественную первой (!), она позволяет выявить подлинные математические ошибки. Следует подчеркнуть, что на экзамене в ходе проверки работы его участника выявляются именно математические ошибки, а не степень (или уровень) соответствия приведенного им решения тексту действующего учебника.

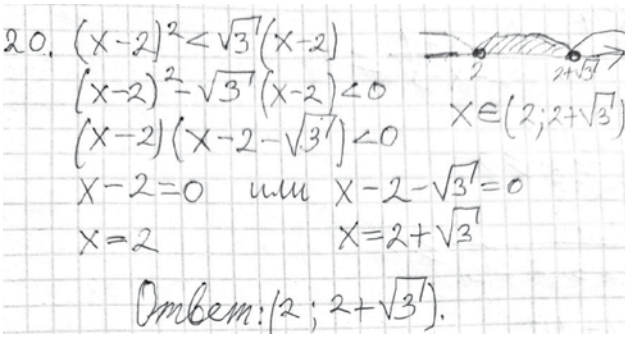
Ранее, до 2026 года, в открытом банке заданий для проведения ОГЭ по математике тоже были неравенства, отнесенные к номеру 20. Более того, в методические рекомендации для предметных комиссий субъектов Российской Федерации специально включались, для примера оценивания, задания на применение метода интервалов.

Приведем пример из методических рекомендаций для предметных комиссий субъектов Российской Федерации за 2025 год [fipi.ru].

Пример 1. Решите неравенство

$$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2).$$

Участник экзамена привел следующее решение.



Это решение компактное и содержит все основные шаги, позволяющие оценить его в 2 балла (максимальное число баллов) — в строгом соответствии с критериями проверки задания под номером 20.

Заметим, что в приведенном решении нет никакого упоминания на исследуемую функцию, ее область определения, знаки значений функции на промежутках ее знакопостоянства и т.д. Почему же приведенное решение не требует никаких дополнительных пояснений?

Здесь очень важную составляющую играет не только методическая «подкованность» и профессионализм эксперта, проверяющего решения заданий второй части ОГЭ по математике, но и безупречная методическая грамотность председателя предметной комиссии в каждом субъекте РФ. Следует подчеркнуть, что не опыт работы, не требования к письменным (контрольным) работам своих учеников или собственные взгляды, а именно безупречная, даже беспристрастная методическая грамотность!

Метод интервалов для решения неравенств в школьном обучении математике имеет как бы два «захода». И в этом неоспоримое преимущество программ математического образования в школах РФ.

Первый «заход», который согласуется с курсом математики основной школы, это применение к решению неравенств свойства двучлена $(x - a)$, второй «заход» — применение свойства знакопостоянства значений непрерывной функции на соответствующих промежутках ее области определения.

Начнем со второго. Ученикам 10–11-х классов знакомо утверждение о том, что если на интервале $(a; b)$ функция f непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

Пример 2. Решите неравенство

$$\frac{x-\sqrt{2x}}{x-4} \leq 0. \qquad (*)$$

Область определения функции

$$f(x)=\frac{x-\sqrt{2x}}{x-4}$$

состоит из промежутков $[0; 4)$ и $(4; +\infty)$.

При $x = 0$ и $x = 2$ верно равенство $f(x) = 0$.

На каждом из промежутков $(0; 2)$, $(2; 4)$ и $(4; +\infty)$ функция f непрерывна и сохраняет знак своих значений.

Знак значений функции f на промежутке $(4; +\infty)$ можно найти по значению функции f в любой точке, принадлежащей промежутку $(4; +\infty)$. Например, $8 \in (4; +\infty)$, значит:

$$f(8)=\frac{8-\sqrt{2\cdot 8}}{8-4},\ f(8)>0.$$

При этом точное значение $f(8)$ можно не находить, достаточно определить лишь его знак.

Взяв $3 \in (2; 4)$, получим:

$$f(3)=\frac{3-\sqrt{2\cdot 3}}{3-4}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{6}}{-1},\ f(3)<0.$$

При этом точное значение $f(3)$ также можно не находить, достаточно определить лишь его знак.

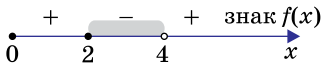
Осталось найти, что

$$f(1)=\frac{1-\sqrt{2\cdot 1}}{1-4},\ f(1)>0.$$

Распределение знаков значений функции

$$f(x)=\frac{x-\sqrt{2x}}{x-4}$$

на промежутках ее области определения можно показать графически.



Таким образом, все решения неравенства (*) принадлежат множеству $\{0\} \cup [2; 4)$.

Ответ: $\{0\} \cup [2; 4)$.

Отметим, что неравенство (*) можно решить иначе, рассмотрев совокупность двух систем, которой оно равносильно:

$$\begin{cases} x-\sqrt{2x}\le 0, \\ x-4>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-\sqrt{2x}\ge 0, \\ x-4<0. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим основу, на которой для ученика девятого класса вводится метод интервалов. Это свойство двучлена $(x - a)$:

– при всех значениях переменной x, больших a (лежащих на числовой прямой правее точки с координатой a), разность $(x - a)$ принимает положительные значения;

– при всех же значениях переменной x, меньших a (лежащих на числовой прямой левее точки с координатой a), разность $(x - a)$ принимает отрицательные значения.

Поэтому для решения неравенства

$$(x - 2)(x + 3) > 0 \qquad (**)$$

в учебниках (учебных пособиях) можно встретить таблицу с анализом знака значений двучленов $(x - 2)$ и $(x + 3)$ на каждом из промежутков $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$ и $(2; +\infty)$.

Это же неравенство можно решить, рассмотрев совокупность двух систем, которой оно равносильно:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+3>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-2<0, \\ x+3<0. \end{cases}$$

Для того же, чтобы упростить решение неравенства (**), и используют графическую схему, на которой отмечают знаки выражения $(x - 2)(x + 3)$ или знаки значений функции

$$f(x) = (x - 2)(x + 3)$$

на соответствующих промежутках.

Важно также отметить, что в учебниках (учебных пособиях) по алгебре для 9-го класса указывается, например, что именно приведенный способ решения неравенств называют методом интервалов или, например, что с обоснованием метода интервалов вы познакомитесь в 10-м классе.

Именно поэтому приводить решение неравенства (**) на экзамене ОГЭ, ЕГЭ или ВПР с введением функции, исследования ее области определения, поиска ее нулей, анализа знаков значений на соответствующих промежутках можно, но это избыточно, а чаще всего ведет к формализму в знаниях обучающихся.

Обратимся к опыту диагностики знаний девятиклассников в СУНЦ НГУ (специализированный учебно-научный центр при Новосибирском государственном университете). В брошюре И.Б. Ляпунова «Тесты по математике для учащихся 9–11-х классов СУНЦ НГУ: практикум (2019)» в варианте 991 приведены две задачи, в которых нужно решить неравенства:

а) $\frac{16}{16-x^2}>1$; б) $\frac{(2x^2-x)(x-2)}{2x+4}\le\frac{2x^2-5x+2}{x+2}$.

Оба этих неравенства требуют от решающего хорошего уровня владения и методом интервалов, и методами преобразования алгебраических выражений.

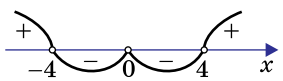
Рассмотрим решения каждого из этих неравенств, которые приведены в этой брошюре.

а) *Решение.*

$$\frac{16}{16-x^2}-1>0,\quad \frac{16-16+x^2}{16-x^2}>0,$$

$$\frac{x^2}{x^2-16}<0,\quad \frac{x^2}{(x+4)(x-4)}<0.$$

Применим метод интервалов согласно рисунку.



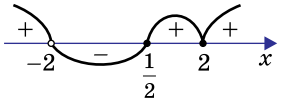
Ответ: $(-4; 0) \cup (0; 4)$.

б) *Решение.*

$$\frac{2x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{2(x+2)}-\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{x+2}\le 0,$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)^2}{x+2}\le 0.$$

Применим метод интервалов согласно рисунку.



Ответ: $\left(-2;\frac{1}{2}\right]\cup\{2\}$.

Еще раз следует подчеркнуть, что это два очень содержательных неравенства. Все шаги решения понятны и логичны. Необходимости в каких-то дополнительных пояснениях нет. А теперь представим себе, что от ученика, который уверенно решает такие задачи, мы потребуем (именно потребуем, а не попросим!) написать кучу ненужных пояснений, которые ничем не улучшат решение. Желание заниматься математикой у него пропадет тут же. Да и ученик станет ощущать себя сороконожкой, которую спросили, в какой очередности она переставляет лапки, с какой лапки начинает движение...

Пример 3. (*Открытый банк заданий ОГЭ*) Решите неравенство

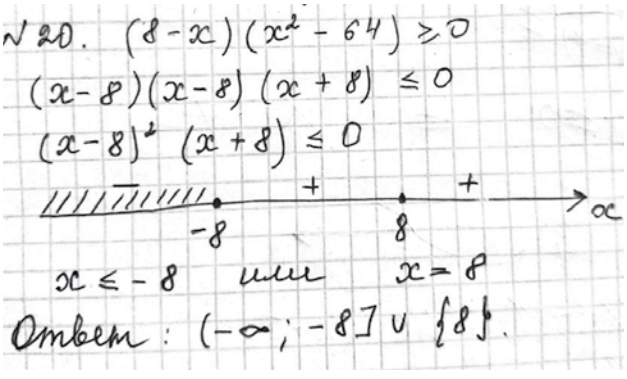
$$(8-x)(x^2-64)\ge 0.$$

Для решения выполним преобразования неравенства:

$$(8-x)(x^2-64)\ge 0,$$
$$-(x-8)(x-8)(x+8)\ge 0,$$
$$(x-8)^2(x+8)\le 0.$$

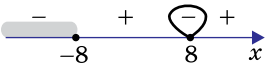
И уже решая последнее неравенство методом интервалов, получим все решения исходного неравенства: $x\le 8$, $x=8$.

Покажем возможный (но не единственный!) вариант записи решения этого неравенства участником экзамена.



В решении показано разложение на линейные множители, расстановка знаков значений выражения $(x-8)^2(x+8)$ на соответствующих промежутках числовой прямой выполнена верно и дополнительных пояснений не требует. Обоснованно получен верный ответ. Оценка при проверке решения 2 балла (из двух возможных).

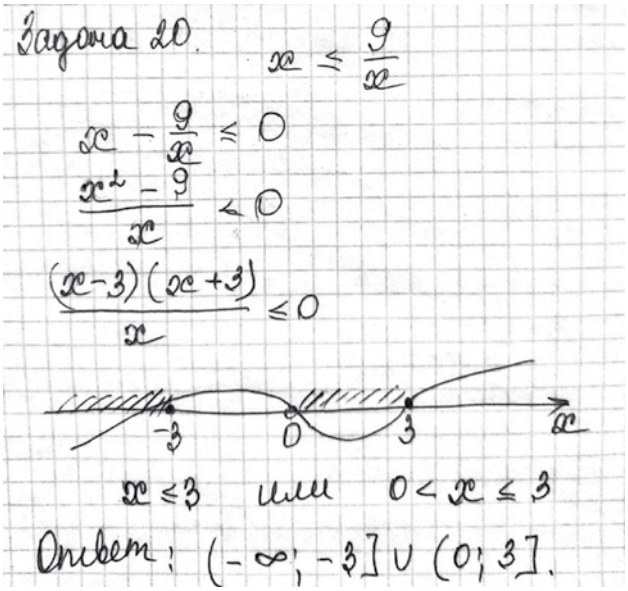
Важное замечание! Частой ошибкой в решении таких неравенств является «чередование» знаков, что приводит к неверному нахождению промежутков решений. Использование «приема»: поставить «знак в петле» для механического выполнения чередования знаков, является грубой математической ошибкой. Значение в такой точке равно нулю, а ноль, как известно, не относится ни к положительным, ни к отрицательным числам.



Экзамены ОГЭ и ЕГЭ по математике являются преемственными, и если обратиться к методическим рекомендациям для предметных комиссий субъектов РФ по проверке заданий ЕГЭ по математике с развернутым ответом, то можно увидеть, что за наличие такой ошибки в решении эксперт в соответствии с критериями ставит 0 баллов.

Пример 4. (*Открытый банк заданий ОГЭ*) Решите неравенство

$$x\le\frac{9}{x}.$$



В приведенном варианте решения вместо расстановки знаков значений применен эквивалентный прием — использование «кривой знаков». Участник экзамена показывает, что там, где она выше числовой прямой, там значения положительные, а там, где она ниже — отрицательные.

В данном случае решение полное и лаконичное. Обоснованно получен верный ответ. Оценка при проверке решения 2 балла (из двух возможных).

Отметим, что задание, прежде чем будет включено в открытый банк заданий для проведения экзамена, проходит обязательную апробацию. Выясняется прежде всего соответствие задания контролируемым элементам содержания (КЭС) и его доступность для решения большинством участников экзамена. Новые задания показали на апробации хороший уровень решаемости, участники апробации приводили различные верные способы их решения.

В некоторых учебниках (учебных пособиях) решение дробно-рациональных неравенств сводят к решению целых неравенств или систем. Например, неравенства

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x}<0 \text{ и } x(x-3)(x+3)<0$$

равносильны, а неравенство

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x}\le 0$$

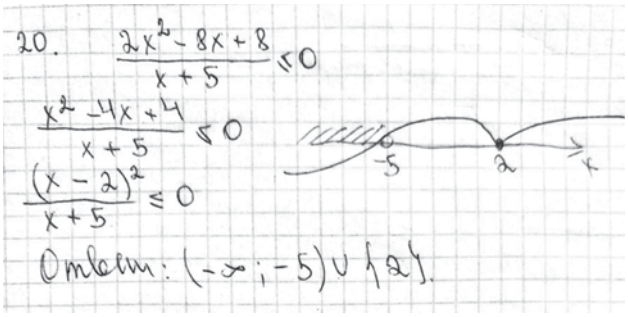
равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x(x-3)(x+3)<0, \\ x\ne 0. \end{cases}$$

Такой способ решения любой эксперт, проверяющий работу участника экзамена, оценит как верный.

Пример 5. (*Открытый банк заданий ОГЭ*) Решите неравенство

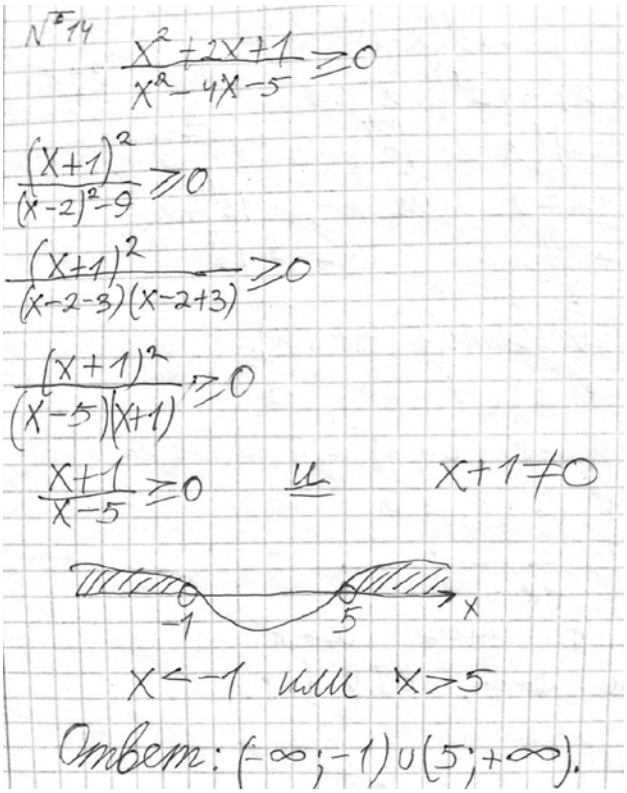
$$\frac{2x^2-8x+8}{x+5}\le 0.$$



В приведенном решении обоснованно получен верный ответ. Использована «кривая знаков», верно показано на числовой прямой и записано в ответ множество решений заданного неравенства. Оценка при проверке решения 2 балла (из двух возможных).

Пример 6. (*Всероссийская проверочная работа, 10-й класс*) Решите неравенство

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x-5}\ge 0.$$



В приведенном решении очень подробно показано разложение на линейные множители квадратного трехчлена, корректно выполнено сокращение дроби, на числовой прямой верно показаны промежутки, соответствующие множеству решений исходного неравенства. Обоснованно получен верный ответ. Оценка при проверке решения 2 балла (из двух возможных).

Метод интервалов — один из самых распространенных методов решения неравенств, и важно, чтобы ученики применяли его верно и осознанно. Поэтому требовать от них в его применении лишнего и ненужного не следует. Математические знания выпускника школы должны быть ценны своей лаконичностью и ясностью.

Литература

1. *Ляпунов И.Б.* Тесты по математике для учащихся 9–11 классов СУНЦ НГУ: практикум. — Новосибирск: СУНЦ НГУ, 2020, 2022.